6.3 Combinaisons linéaires, espaces engendrés

6.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soient $u_1, .., u_p$ des vecteurs de E.

1. **On appelle combinaison linéaire à coefficients réels de $u_1, .., u_p$ tout vecteur $X \in E$ de la forme :**
$$X = a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p$$
avec $a_1, \ldots, a_p$ réels.
2. **2 vecteurs u et v de E sont dits colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$**
3. **p vecteurs $u_1, .., u_p$ sont dits colinéaires, su l'un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres**

Remarque 4 :

1. Une combinaison linéaire est toujours une somme finie.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est stable par combinaison linéaire.

Exemple 5 :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, si $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$ et $u_3 = (7, 8, 9)$, nous avons $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3$; u_2 est donc combinaison linéaire de u_1 et de u_3
2. En fait, dans $\mathbb{R}^3$, tous les triplets (x, y, z) sont combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, car :
$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$,$\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, tout polynôme P est combinaison linéaire des polynômes e_0, e_1 et e_2, où $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X$ et $e_2(X) = X^2$

6.3.2 Proposition et définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u_1, .., u_p$, p vecteurs de E. On appelle $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des vecteurs $u_1, .., u_p$, c'est à dire :

$$\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p) = \left\{ x \in E \textbf{ tels que } x = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i \textbf{ où } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Nous avons les résultats suivants :

1. **$\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E**
2. **$\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ est appelé espace engendré par $u_1, .., u_p$, ou que que la famille $\{u_1, .., u_p\}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$**

Démonstration

Nous allons montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E

1. Vérifions d'abord que $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p) \neq \emptyset$

   Il suffit de voir que $\overrightarrow{0} = 0.u_1 + \ldots + 0.u_p$; donc, $\overrightarrow{0}$ est combinaison linéaire des $u_1, .., u_p$, et donc $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$

2. Soient $a \in \text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$, $b \in \text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ Alors

$$\begin{aligned} \lambda a + \mu b &= \lambda \sum_{i=1}^{p} a_i u_i + \mu \sum_{i=1}^{p} b_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda a_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \mu b_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} (\lambda a_i + \mu b_i)\, u_i \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\lambda a + \mu b$ est combinaison linéaire des $u_1, .., u_p$ et est élément de $\text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$
Donc $\text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E

6.3.3 Proposition et définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E. Alors,

1. **Il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A ; ce sous-espace vectoriel est l'intersection de tous les sous-espace vectoriels contenant A. On appelle cet espace $\text{Vect}\,(A)$ $\text{Vect}\,(A)$ est le sous-espace vectoriel engendré par A**
2. **$\text{Vect}\,(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A**

Démonstration

On appelle $\Gamma(A)$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A ; il faut donc montrer que $\Gamma(A) = \text{Vect}\,(A)$

1. Tout d'abord, montrons que $\Gamma(A)$ est un sous-espace vectoriel , et $A \subset \Gamma(A)$
   - ▷ $\Gamma(A) \neq \emptyset$ puisque $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{a}$ où $\overrightarrow{a} \in A$
   - ▷ Ensuite, si $x \in \Gamma(A)$, $y \in \Gamma(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
     Alors $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k a_k$ et $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} y_k b_k$, avec $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p$ $n+p$ éléments de A et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p$ $n+p$ éléments de $\mathbb{R}$, et donc :
     $$\lambda x + \mu y = \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k a_k + \sum_{k=1}^{p} \mu y_k b_k$$
     Et $\lambda x + \mu y$ apparaît ainsi comme une combinaison linéaire d'éléments de A et $\lambda x + \mu y \in \Gamma(A)$
   - ▷ Ainsi,$\Gamma(A)$ est un sous-espace vectoriel de E

   Donc, $\Gamma(A)$ étant un sous-espace vectoriel et $\text{Vect}\,(A)$ étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant A $\text{Vect}\,(A) \subset \Gamma(A)$
2. Tout sous-espace vectoriel F de E contenant A contient toute combinaison linéaire d'éléments de A, donc $\Gamma(A) \subset F$
3. Donc $\Gamma(A) \subset \bigcap_{F \supset A} F$; donc $\Gamma(A) \subset \text{Vect}\,(A)$
4. Ainsi,$\Gamma(A) = \text{Vect}\,(A)$

Exemple 6 :

1. Si dans $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$, alors, $\text{Vect}\,(\{u_1, u_2\}) = \{\lambda u_1 + \mu u_2 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$
   Si $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_3 = (7, 8, 9)$, que dire de $\text{Vect}\,(\{u_1, u_2\})$ et de $\text{Vect}\,(A)$?

   Nous avons clairement $\text{Vect}\,(\{u_1, u_2\}) = \text{Vect}\,(A)$
   — Soit $x \in \text{Vect}\,(\{u_1, u_2\})$; alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda u_1 + \mu u_2$. Or $u_1 + u_3 = 2u_2$, c'est à dire que $u_3 = 2u_2 - u_1$.

Donc,

$$\begin{aligned} x = & \lambda u_1 + \mu u_2 \\ = & \lambda u_1 + \mu u_2 + u_3 - u_3 \\ = & \lambda u_1 + \mu u_2 + u_3 - 2u_2 + u_1 \\ = & (\lambda + 1) u_1 + (\mu - 2) u_1 + u_3 \end{aligned}$$

x est donc combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3, et donc $x \in \text{Vect}(A)$
Donc $\text{Vect}(\{u_1, u_2\}) \subset \text{Vect}(A)$

— Réciproquement, supposons $x \in \text{Vect}(A)$; alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma u_3$
De l'égalité $u_3 = 2u_2 - u_1$, nous avons,

$$\begin{aligned} x = & \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma u_3 \\ = & \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma (2u_2 - u_1) \\ = & (\lambda - \gamma) u_1 + (\mu + 2\gamma) u_2 \end{aligned}$$

x est donc combinaison linéaire de u_1 et u_2, et donc $x \in \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$
Donc, $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$

En conclusion, $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$

2. Tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, et on a donc :

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\{(0, 1) ; (1, 0)\})$$

3. Mais nous avons aussi $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\{(2, 0) ; (-1, 1)\})$

Remarque 5 :

1. L'espace engendré par un seul vecteur non nul u est appelé **droite vectorielle engendrée par** u. L'espace engendré par deux vecteurs non nuls et non colinéaires est un plan vectoriel.
2. Cette proposition justifie le fait que l'on pose $\text{Vect}(\emptyset) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ puisque $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
3. Cette proposition permet de construire des sous-espace vectoriels en donnant l'ensemble des vecteurs qui les engendrent. Par exemple on peut parler du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u qui n'est autre qu'une droite vectorielle.

6.3.4 Proposition

Soient A et B des parties de E qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On suppose que $A \subset B$. Alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Démonstration

Soit $x \in \text{Vect}(A)$; alors il existe $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

Comme $A \subset B$, pour tout $i = 1, \cdots, n$, si $x_i \in A$, alors $x_i \in B$ et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est donc un élément de $\text{Vect}(B)$; donc $x \in \text{Vect}(B)$ C'est à dire, $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$

6.3.5 Proposition

Soient $p \geqslant 2$ un entier et $u_1, .., u_p$ des vecteurs de E.

1. **Soit a un réel non nul, alors :** $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(a.u_1, \dots, u_p)$
2. **Soit $v = u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$, alors :** $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(v, u_2 \dots, u_p)$

C'est à dire : On ne change pas l'espace engendré par un ensemble de vecteurs quand on change un des vecteurs en lui ajoutant une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstration

1. Montrons que $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \text{Vect}\,(a.u_1, \ldots, u_p)$
   - ▷ Soit $x \in \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$; alors, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Nous pouvons aussi écrire $x = \frac{\lambda_1}{a} a u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$, et on démontre ainsi que $x \in \text{Vect}\,(a.u_1, \ldots, u_p)$
     Donc, $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) \subset \text{Vect}\,(a.u_1, \ldots, u_p)$
   - ▷ Une démonstration semblable montrerait que $\text{Vect}\,(a.u_1, \ldots, u_p) \subset \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$

   Donc, nous avons $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \text{Vect}\,(a.u_1, \ldots, u_p)$
2. Montrons que $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \text{Vect}\,(v, u_2 \ldots, u_p)$ où $v = u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$
   - ▷ Soit $x \in \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$; alors, il existe $x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i$. Nous pouvons aussi écrire $x = x_1 u_1 + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i$.
     En re-écrivant $u_1 = v - \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$, nous avons :
     $$x = x_1 u_1 + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i = x_1 \left(v - \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i \right) + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i = x_1 v + \sum_{i=2}^{p} (x_i - \lambda_i)\, u_i$$
     Donc, $x \in \text{Vect}\,(v, u_2 \ldots, u_p)$ et $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) \subset \text{Vect}\,(v, u_2 \ldots, u_p)$
   - ▷ Soit $x \in \text{Vect}\,(v, u_2 \ldots, u_p)$
     Alors, $x = x_1 v + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i$. On utilise le fait que $v = u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$, et nous avons :
     $$x = x_1 \left(u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i \right) + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i = x_1 u_1 + \sum_{i=2}^{p} (x_1 \lambda_i + x_i)\, u_i$$
     D'où $x \in \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ et donc $\text{Vect}\,(v, u_2 \ldots, u_p) \subset \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$

   Donc, nous avons $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \text{Vect}\,(v, u_2 \ldots, u_p)$

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$,on considère la famille $u = (-1, 1, -3)\,, v = (1, 2, 5)\,, w = (-1, 7, 1)$. Avons nous

1. $\text{Vect}\,(u, v, w) = \text{Vect}\,(u, v)$
2. $\text{Vect}\,(u, v, w) = \text{Vect}\,(u, w)$
3. $\text{Vect}\,(u, v, w) = \text{Vect}\,(v, w)$

Résolution de l'exercice

Pour démontrer une quelconque de ces égalités, il faut vérifier que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des 2 autres, en d'autres termes, existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que, par exemple, $w = au + bv$?
Si ces réels existent, nous avons le système :

$$\begin{cases} -a + b = & -1 \\ a + 2b = & 7 \\ -3a + 5b = & 1 \end{cases}$$

D'où on tire que $a = 3$ et $b = 2$, et donc $w = 3u + 2v$

1. Ainsi, si $x \in \text{Vect}(u, v, w)$, alors $x = au + bv + cw$ et, en remplaçant w par sa valeur en fonction de u et v, nous avons :

$$x = au + bv + cw = au + bv + c(3u + 2v) = (a + 3c)u + (b + 2c)v$$

   Et donc, $x \in \text{Vect}(u, v)$
2. Réciproquement, si $x \in \text{Vect}(u, v)$, alors $x = au + bv = au + bv + w - w = au + bv + w - (3u + 2v) = (a - 3)u + (b - 2)v + w$
   et donc, $x \in \text{Vect}(u, v, w)$
3. Nous avons donc $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$

Les autres démonstrations sont semblables. Il faut simplement remarquer que :

$$w = 3u + 2v \Longleftrightarrow u = \frac{1}{3}w - \frac{2}{3}v \Longleftrightarrow v = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}u$$

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$.
Montrer que $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(c, d)$.

Résolution de l'exercice

La résolution de cet exercice ne diffère pas de l'exercice précédent. Il suffit effectivement de montrer que les vecteurs c et d sont combinaisons linéaires de a et b

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $c = \lambda a + \mu b$; alors, nous avons le système :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = & 3 \\ 3\lambda - \mu = & 7 \\ -\lambda - 2\mu = & 0 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $\lambda = 2$ et $\mu = -1$, c'est à dire que $c = 2a - b$
2. de même, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $d = \lambda a + \mu b$; alors, nous avons le système :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = & 5 \\ 3\lambda - \mu = & 0 \\ -\lambda - 2\mu = & -7 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, c'est à dire que $d = a + 3b$
3. Du système

$$\begin{cases} c = & 2a - b \\ d = & a + 3b \end{cases}$$

   On tire donc $a = \frac{3}{7}c + \frac{1}{7}d$ et $b = -\frac{1}{7}c + \frac{1}{7}d$

Nous avons donc bien $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(c, d)$

6.3.6 Définition

Soient E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de E ; on appelle sous-espace vectoriel somme de F_1 et F_2 l'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{y \in E \text{ tels que } y = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2\}$$

6.3.7 Proposition

Soient E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de E. Alors $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

1. Premièrement, $F_1 + F_2 \neq \emptyset$. Comme d'habitude, il suffit de voir que $\overrightarrow{0} \in F_1 + F_2$.
   En effet, $\overrightarrow{0} \in F_1 \cap F_2$, et $\overrightarrow{0}$ peut être considéré comme élément de F_1 ou élément de F_2. De $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$, nous avons bien $\overrightarrow{0} \in F_1 \cap F_2$
2. En second lieu, soient $u \in F_1 + F_2$, $v \in F_1 + F_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$; nous allons montrer que $\lambda u + \mu v \in F_1 + F_2$
   - Comme $u \in F_1 + F_2$, il existe $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$ tels que $u = u_1 + u_2$; de même $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$.
     Donc : $\lambda u + \mu v = \lambda (u_1 + u_2) + \mu (v_1 + v_2) = (\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2)$
   - F_1 étant un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u_1 + \mu v_1 \in F_1$; de même, F_2 étant un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u_2 + \mu v_2 \in F_1$
     Donc, $\lambda u + \mu v \in F_1 + F_2$

$F_1 + F_2$ est bien un sous-espace vectoriel de E

6.3.8 Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de E ; alors, $\mathrm{Vect}\,(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$

Démonstration

Il nous faut donc démontrer que $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F_1 \cup F_2$

1. Tout d'abord, $F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$
   En effet, si $y \in F_1 \cup F_2$, alors $y \in F_1$ ou $y \in F_2$.
   Si $y \in F_1$, alors $y = y + \overrightarrow{0}$ et donc $y \in F_1 + F_2$. Il en est de même si $y \in F_2$.
   Donc $F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$
2. Ensuite, $F_1 + F_2$ étant un sous-espace vectoriel de E, nous avons donc sûrement $\mathrm{Vect}\,(F_1 \cup F_2) \subset F_1 + F_2$
3. Mais, en fait, $F_1 + F_2$ est strictement l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de F_1 et de F_2, donc d'éléments de $F_1 \cup F_2$; ainsi, d'après 6.3.3, $\mathrm{Vect}\,(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$

Exercice 5 :

Soient F et G des sous-espace vectoriels de E. Montrez que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Correction de l'exercice

1. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$, et G étant un sous-espace vectoriel , il en est de même de $F \cup G$
   De même si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$, et F étant un sous-espace vectoriel , il en est de même de $F \cup G$
2. Réciproquement, supposons $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$
   Il existe alors $x \in F$ tel que $x \notin G$, c'est à dire tel que $x \in F \backslash G$; de même, il existe $y \in G$ tel que $y \notin F$, c'est à dire tel que $y \in G \backslash F$
   Nous avons, en fait, $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$; comme $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel , nous avons $x + y \in F \cup G$, c'est à dire $x + y \in F$ ou $x + y \in G$
   — Si $x + y \in F$, alors $y = (x + y) - x$, et $y \in F$, car F est un sous-espace vectoriel ; ce qui est absurde, car, par hypothèse, $y \notin F$
   — De même, on démontre que si $x + y \in G$, alors $x \in G$
   La réunion de deux sous-espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel , si aucun des deux n'est inclus dans l'autre

6.3.9 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de E
Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

1. $E = F_1 + F_2$ **et** $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
2. **Tout élément** $x \in E$ **s'écrit de manière unique sous la forme** $x = x_1 + x_2$ **où** $x_1 \in F_1$ **et** $x_2 \in F_2$

Démonstration

1. Supposons $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Montrons l'unicité de la décomposition $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$
   Supposons qu'il y ait deux décompositions, c'est à dire que nous avons aussi $x = y_1 + y_2$ où $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F_2$.
   Alors, nous avons l'égalité $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$, c'est à dire,$y_1 - x - 1 = x_2 - y_2$; F_1 étant un sous-espace vectoriel , $y_1 - x_1 \in F_1$; de même $x_2 - y_2 \in F_2$, et donc $y_1 - x_1 \in F_1 \cap F_2$, c'est à dire $y_1 - x_1 = \overrightarrow{0}$, et donc $y_1 = x_1$.
   Le raisonnement vaut aussi pour $y_2 = x_2$
   Ainsi, si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, Tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$
2. Réciproquement, supposons que tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in$
   Il faut donc montrer que $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Soit $y \in F_1 \cap F_2$
   - Alors, on considère d'abord que $y \in F_1$: $y = y + \overrightarrow{0}_{F_2}$;
   - De même, si on considère $y \in F_2$, nous avons $y = \overrightarrow{0}_{F_1} + y$
   - Donc $\overrightarrow{0}_{F_1} + y = y + \overrightarrow{0}_{F_2}$
     De l'unicité de la décomposition,nous déduisons que $y = \overrightarrow{0}_{F_1} = \overrightarrow{0}_{F_2} = \overrightarrow{0}$

6.3.10 Définition

Quand l'une des deux conditions de 6.3.9 sont réunies, on dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E et on note alors $E = F_1 \oplus F_2$
On dit donc que E est somme directe de F_1 et de F_2, et que F_2 est un supplémentaire de F_1 dans E, (et réciproquement ! !)

Exemple 7 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, les espaces $F_1 = \{(x,0)\, x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(0,y)\, y \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires.
   Il est tout à fait évident que tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique
   $$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$
2. **Un exemple classique :** On appelle $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est somme directe des ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires.
   (a) Soit P l'ensemble des fonctions paires. Nous avons déjà démontré que c'était un sous-espace vectoriel
   (b) Soit I l'ensemble des fonctions impaires. Nous démontrons, de la même manière que c'est un sous-espace vectoriel
   (c) Le plus difficile est donc de montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = P \oplus I$
      i. On montre que $P \cap I = \{\mathcal{O}\}$
         Soit $\varphi \in P \cap I$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(-x) = \varphi(x)$ car $\varphi \in P$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ car $\varphi \in I$
         Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(x) = -\varphi(x)$, c'est à dire $2\varphi(x) = 0$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(x) = 0$; φ est donc la fonction nulle $\mathcal{O}$

ii. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; nous allons montrer que f est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

En posant

— $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

— $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

On démontre facilement, que φ est paire, que ψ est impaire, et que $f = \varphi + \psi$

Nous avons bien $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = P \oplus I$